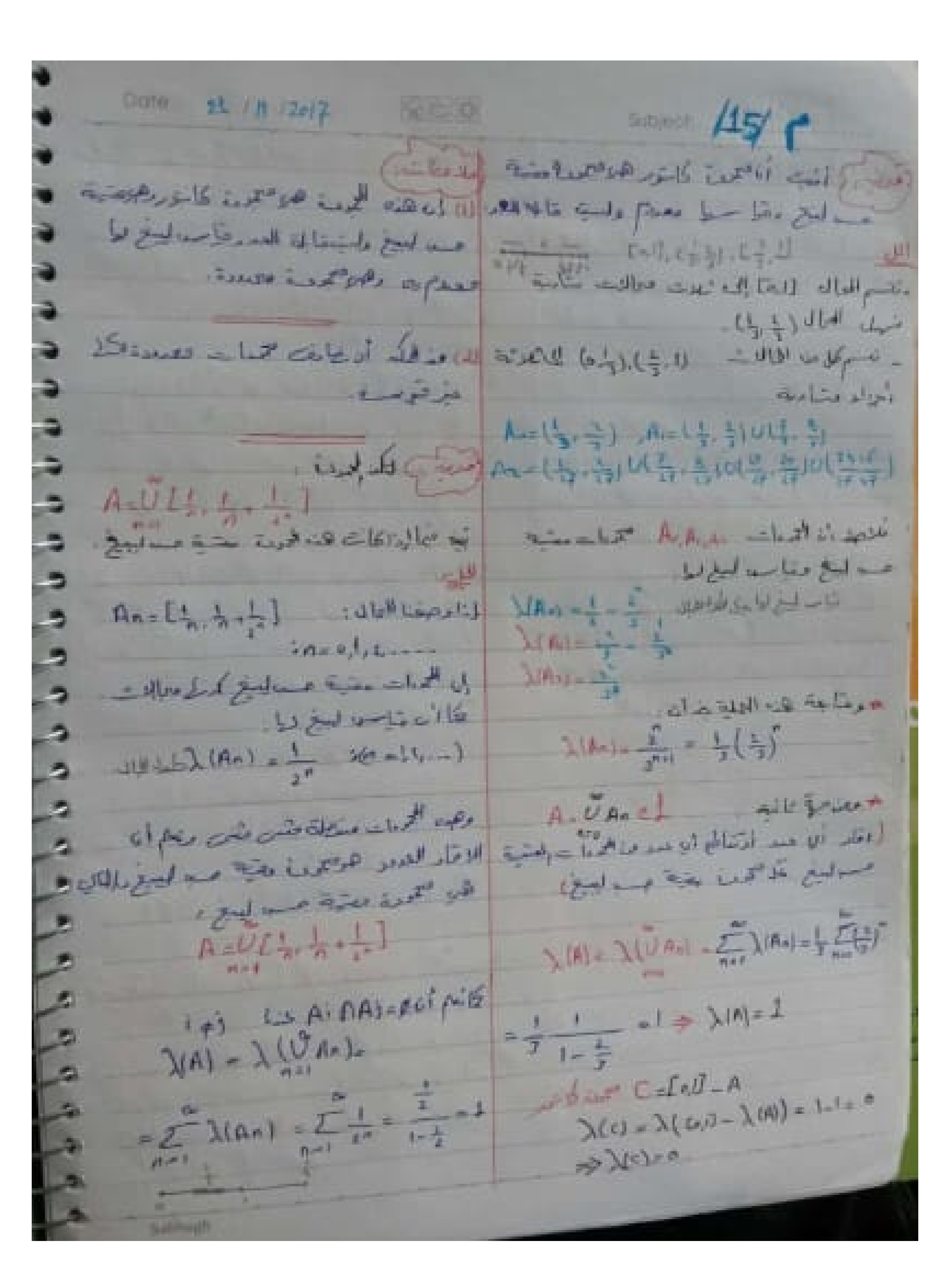


Date: 21 / 11 / 2017 — Subject: م 15

تمرين: أثبت أن مجموعة كانتور هي مجموعة مقيسة من لبيغ وقياسها معدوم

الحل:

$[0,1],\ (\frac{1}{3},\frac{2}{3}),\ [\frac{2}{3},1]$

نقسم المجال $[0,1]$ إلى ثلاث مجالات متساوية

نحذف المجال $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$.

- نقسم كلاً من المجالات $(0,\frac{1}{3}),(\frac{2}{3},1)$ إلى ثلاثة أجزاء متساوية

$A_0=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, $A_1=(\frac{1}{9},\frac{2}{9})\cup(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$

$A_2=(\frac{1}{27},\frac{2}{27})\cup(\frac{7}{27},\frac{8}{27})\cup(\frac{19}{27},\frac{20}{27})\cup(\frac{25}{27},\frac{26}{27})$

نلاحظ أن المجالات A, A_1, A_2 مجالات مفتوحة من لبيغ وقياس لبيغ لها

$\lambda(A_0)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$

$\lambda(A_1)=\frac{2}{3^2}$

$\lambda(A_2)=\frac{2^2}{3^3}$

* وبمتابعة هذه العملية نجد أن:

$\lambda(A_n)=\frac{2^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$

* ومجموعة $A=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$

(نقول أن ... مجموعة مقيسة من لبيغ)

$\lambda(A)=\lambda(\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(A_n)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^n$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1 \Rightarrow \lambda(A)=1$

مجموعة كانتور $C=[0,1]-A$

$\lambda(C)=\lambda([0,1])-\lambda(A)=1-1=0$

$\Rightarrow \lambda(C)=0$

ملاحظات:

(1) إن مجموعة كانتور هي مجموعة مقيسة من لبيغ وقياس لبيغ لها معدوم وهي مجموعة غير معدودة.

(2) هناك أنواع مجالات ... غير متقاطعة.

تمرين: لتكن المجموعة

$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n},\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}]$

بيّن أن هذه المجموعة مقيسة من لبيغ.

الحل:

لنأخذ المجال: $A_n=[\frac{1}{n},\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}]$; $n=1,2,\dots$

إن المجالات مقيسة من لبيغ لأنها مجالات وقياس لبيغ لها

$\lambda(A_n)=\frac{1}{2^n}$; $(n=1,2,\dots)$

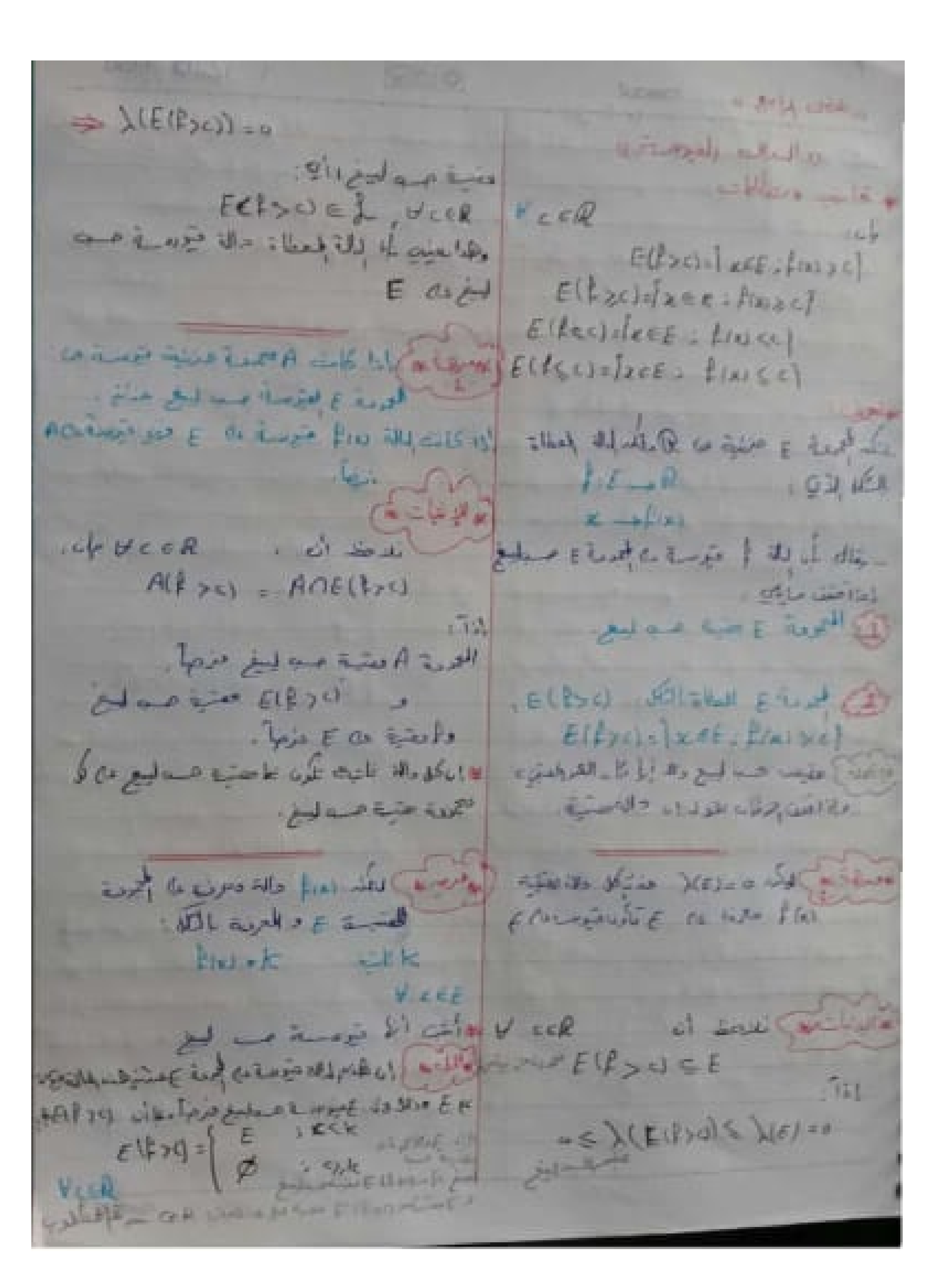
وهذه المجالات ... الاتحاد المعدود هو مجموعة مقيسة من لبيغ وبالتالي فهي مجموعة مقيسة من لبيغ

$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n},\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}]$

$A_i\cap A_j=\emptyset$

$\lambda(A)=\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$



فضاء القياس

الدوال المقيسة

* تعاريف ومبرهنات

ليكن $c \in \mathbb{R}$

$E(f>c) = \{x \in E : f(x) > c\}$

$E(f \geq c) = \{x \in E : f(x) \geq c\}$

$E(f<c) = \{x \in E : f(x) < c\}$

$E(f \leq c) = \{x \in E : f(x) \leq c\}$

تعريف: لتكن المجموعة E جزئية من $\mathbb{R}$ ولتكن الدالة الحقيقية ذات الشكل الآتي:

$f : E \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x)$

يقال أن الدالة f مقيسة على المجموعة E بمعنى لوبيغ إذا تحقق ما يلي:

(1) المجموعة E مقيسة بمعنى لوبيغ.

(2) المجموعة $E(f>c)$ المعطاة بالشكل $E(f>c) = \{x \in E : f(x) > c\}$ مقيسة بمعنى لوبيغ مهما كان العدد الحقيقي c.

مبرهنة: لتكن $\lambda(E) = 0$ عندئذ كل دالة حقيقية $f(x)$ معرفة على E تكون مقيسة على E.

البرهان: نلاحظ أن $\forall c \in \mathbb{R}$

$E(f>c) \subseteq E$

إذا:

$0 \leq \lambda(E(f>c)) \leq \lambda(E) = 0$

$\Rightarrow \lambda(E(f>c)) = 0$

مقيسة بمعنى لوبيغ أي:

$E(f>c) \in \mathcal{L}, \ \forall c \in \mathbb{R}$

وبالتالي فإن الدالة المعطاة دالة مقيسة على E

مبرهنة 2: إذا كانت A مجموعة جزئية مقيسة من المجموعة E المقيسة بمعنى لوبيغ حيث: إذا كانت الدالة $f(x)$ مقيسة على E فهي مقيسة على A أيضا.

البرهان: نلاحظ أنه $\forall c \in \mathbb{R}$ لدينا

$A(f>c) = A \cap E(f>c)$

إذا:

المجموعة A مقيسة بمعنى لوبيغ فرضا.

و $E(f>c)$ مقيسة بمعنى لوبيغ لأن f مقيسة على E فرضا.

* إن تقاطع مجموعتين مقيستين بمعنى لوبيغ هو مجموعة مقيسة بمعنى لوبيغ.

مبرهنة: لتكن $f(x)$ دالة معرفة على المجموعة المقيسة E و معرفة بالشكل:

$f(x) = k$ حيث k ثابت

$\forall x \in E$

أثبت أن f مقيسة بمعنى لوبيغ $\forall c \in \mathbb{R}$

البرهان: نلاحظ أن

$$E(f>c) = \begin{cases} E & ; c<k \\ \emptyset & ; \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

$\forall c \in \mathbb{R}$